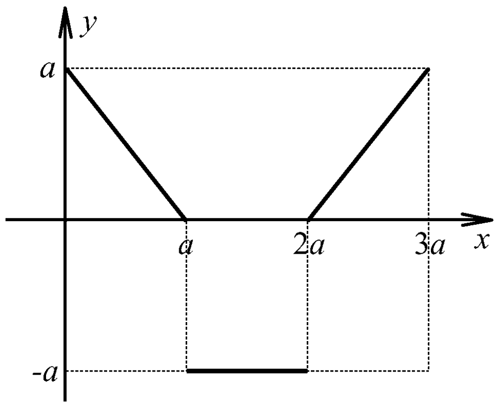
Analiza III, pismeni ispit, 14.09.2015.



1. Dio grafika funkcije dat je na slici lijevo.

(60%)(a) Slikom i riječima objasniti kako će izgledati grafik funkcije (skicirati grafik funkcije) na intervalu $[-8a, 8a]$ ako datu funkciju želimo pretvoriti u Furijerov red samo po sin-usima. Isto tako skicirati grafik funkcije na intervalu $[-8a, 8a]$ ako funkciju želimo pretvoriti u Furijerov red samo po cos-inusima.

(40%)(b) Diskutovati koji interval je najpraktičnije posmatrati ako datu funkciju želimo pretvoriti u Furijerov red po sin-usima ili cos-inusima (taj interval definitivno nije $[-8a, 8a]$? Ili jest?). U oba slučaja napisati formule za Furijerove koeficijente i napisati formule za Furijerov red (dobijene integrale ne treba računati). Da li će u jednom od dva razmatrana slučaja biti $a_n = 0$? Zašto?

2. (30%)(a) Odrediti realan broj α tako da $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy(\sqrt{x^2+y^2})^{\alpha}$ postoji.

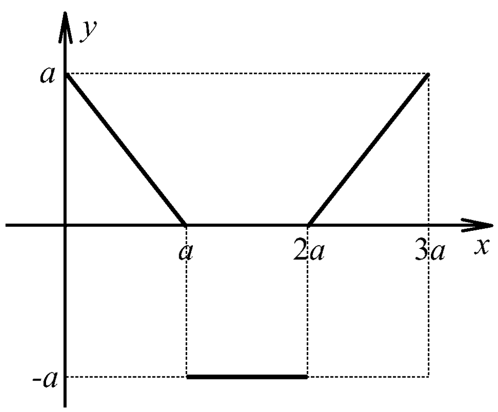
(70%)(b) Izračunati $I = \iint\limits_D \left(x + \dfrac{y^2}{x^2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ gdje je $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 2ax \leq 0, a > 0\}$.

3. Data je kriva c koja je dobijena kao presjek površina $x^2 + y^2 = r^2$ i $x^2 = rz$ $(r > 0)$. Izračunati površinski integral $\iint\limits_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ gdje je S gornja strana površine koju zatvara kriva c.

4. Izračunati fluks vektorskog polja $\vec{v} = (x, -y^2, x^2+z^2-1)$ po unutrašnjoj strani sfere $x^2+y^2+z^2 = 1$.

VAŽNO: Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte. Prije predavanja rješenja numerišite svaku stranicu brojem oblika: broj-stranice/broj-strana...

Analiza III, pismeni ispit, 14.09.2015.



1. Dio grafika funkcije dat je na slici lijevo.

(60%)(a) Slikom i riječima objasniti kako će izgledati grafik funkcije (skicirati grafik funkcije) na intervalu $[-8a, 8a]$ ako datu funkciju želimo pretvoriti u Furijerov red samo po sin-usima. Isto tako skicirati grafik funkcije na intervalu $[-8a, 8a]$ ako funkciju želimo pretvoriti u Furijerov red samo po cos-inusima.

(40%)(b) Diskutovati koji interval je najpraktičnije posmatrati ako datu funkciju želimo pretvoriti u Furijerov red po sin-usima ili cos-inusima (taj interval definitivno nije $[-8a, 8a]$? Ili jest?). U oba slučaja napisati formule za Furijerove koeficijente i napisati formule za Furijerov red (dobijene integrale ne treba računati). Da li će u jednom od dva razmatrana slučaja biti $a_n = 0$? Zašto?

2. (30%)(a) Odrediti realan broj α tako da $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy(\sqrt{x^2+y^2})^{\alpha}$ postoji.

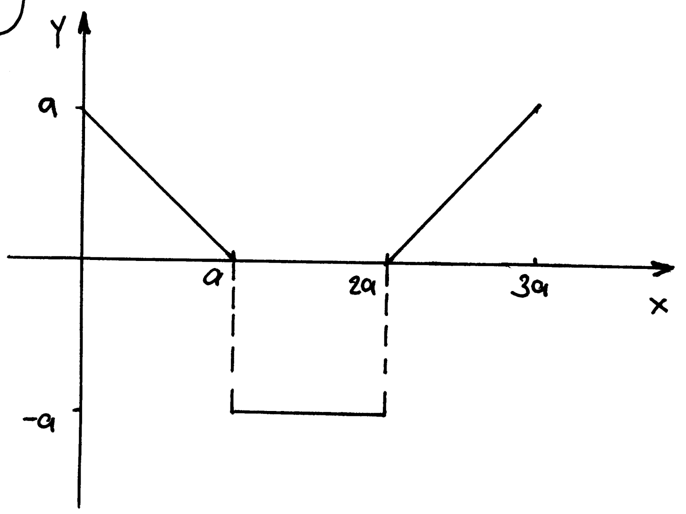
(70%)(b) Izračunati $I = \iint\limits_D \left(x + \dfrac{y^2}{x^2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ gdje je $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 2ax \leq 0, a > 0\}$.

3. Data je kriva c koja je dobijena kao presjek površina $x^2 + y^2 = r^2$ i $x^2 = rz$ $(r > 0)$. Izračunati površinski integral $\iint\limits_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ gdje je S gornja strana površine koju zatvara kriva c.

4. Izračunati fluks vektorskog polja $\vec{v} = (x, -y^2, x^2+z^2-1)$ po unutrašnjoj strani sfere $x^2+y^2+z^2 = 1$.

VAŽNO: Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte. Prije predavanja rješenja numerišite svaku stranicu brojem oblika: broj-stranice/broj-strana...

#



Dio grafika f-je dat je na slici lijevo. Slikom i riječima objasniti kako će izgledati grafik f-je (skicirati grafik f-je) na intervalu $[-8a, 8a]$ ako datu f-ju želimo pretvoriti u Furijer-ov red samo po sinusima. Isto tako skicirati grafik f-je na intervalu $[-8a, 8a]$ ako f-ju želimo pretvoriti u Furijer-ov red samo po cosinusima. Diskutovati koji interval je najpraktičnije posmatrati ako datu f-ju želimo pretvoriti u Furijerov red (taj interval definitivno nije $[-8a, 8a]$? Ili jest?). U oba slučaja napisati formule za Furijer-ove koeficijente i napisati formule za Furijerov red (dobijene integrale ne treba računati). Da li će u jednom od dva razmatrana slučaja biti $a_n = 0$? Zašto?

Rj.

Prisjetimo se definicije Furijer-ovog reda f-je $y = f(x)$ na nekom intervalu (c, d)

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{d-c} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{d-c} \right)$$

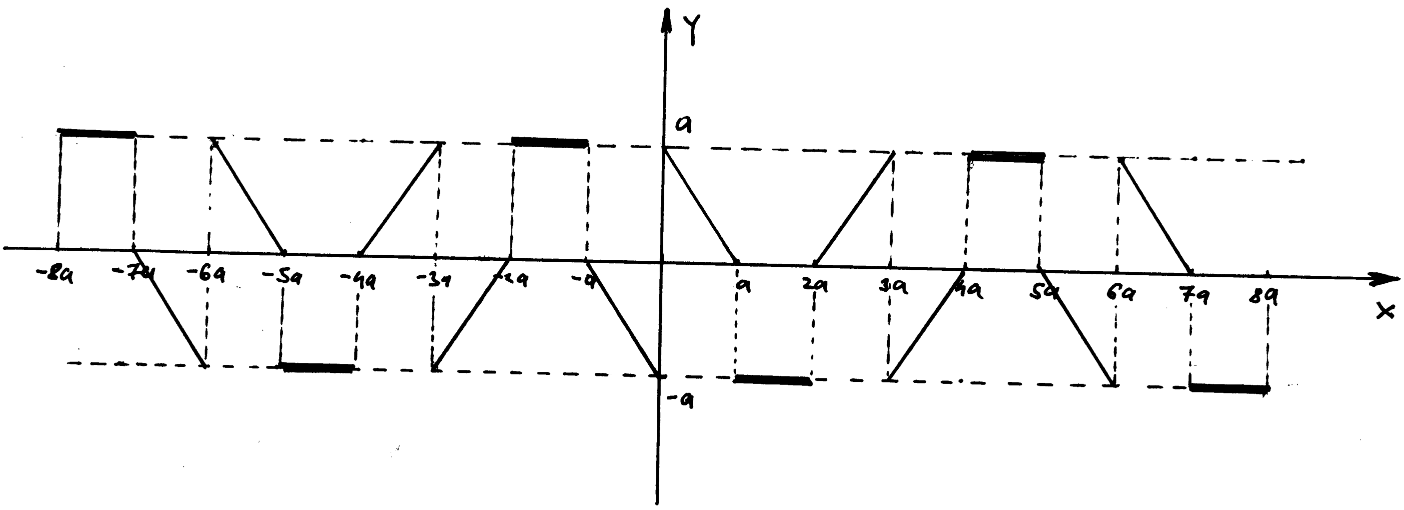
gdje su $a_0 = \frac{2}{d-c} \int_c^d f(x)\, dx$, $a_n = \frac{2}{d-c} \int_c^d f(x) \underbrace{\cos \frac{2n\pi x}{d-c}}_{\text{parna}} dx$

$$b_n = \frac{2}{d-c} \int_c^d f(x) \underbrace{\sin \frac{2n\pi x}{d-c}}_{\text{neparna}} dx$$

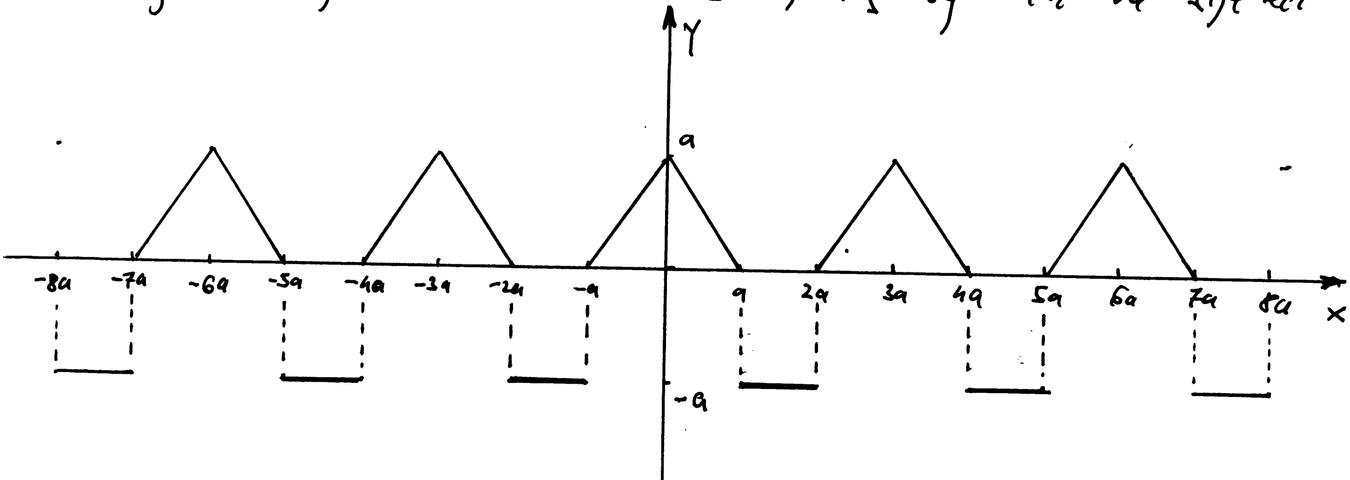
Iz formula za Furijerove koeficijente vidimo da ako je $f(x)$ parna f-ja i ako je interval $[c,d]$ simetričan u odnosu na nulu (tj. ako je oblika $[-l,l]$) tada je $b_n=0$ za $\forall n$ tj. tada ćemo imati slučaj da se data f-ja razvija u Furijerov red samo po cos-inusima.

Ako je $f(x)$ neparna f-ja i ako je $[c,d]$ simetričan u odnosu na nulu tada je $a_n=0$ i tada f-ju razvijamo u Furijerov red samo po sinusima.

Ako datu f-ju želimo pretvoriti u Furijer-ov red samo po sin-usima tada tada će grafik f-je na intervalu $[-8a,8a]$ izgledati na sljedeći način:



Ako f-ju želimo pretvoriti u Furijer-ov red samo po cos-inusima tada će grafik f-je na intervalu $[-8a,8a]$ izgledati na sljedeći način



Ako f-ju želimo pretvoriti u Furijer-ov red samo po sinusima ili samo po cosinusima najpraktičnije je posmatrati interval $[-3a, 3a]$.

Pa ako posmatramo interval $[\overset{c}{-3a}, \overset{d}{3a}]$ imamo

$$d-c=6a, \quad \frac{2}{d-c}=\frac{2}{6a}=\frac{1}{3a}, \quad \frac{2n\pi x}{d-c}=\frac{2n\pi x}{6a}=\frac{n\pi x}{3a}$$

i tada bi Furijer-ove koeficijente računali sa

$$a_0=\frac{1}{3a}\int_{-3a}^{3a} f(x)\,dx, \qquad a_n=\frac{1}{3a}\int_{-3a}^{3a} f(x)\cos\frac{n\pi x}{3a}\,dx$$

$$b_n=\frac{1}{3a}\int_{-3a}^{3a} f(x)\sin\frac{n\pi x}{3a}\,dx$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$(a,0)$
$(0,a)$

$$\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{a}$$

$$y=-x+a$$

gdje bi $f(x)$ odredili u zavisnosti od slučaju koji imamo.
Furijer-ov red bi glasio

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{3a}+b_n\sin\frac{n\pi x}{3a}\right)$$

U slučaju kada je $f(x)$ neparna f-ja, imaćemo da je $a_n=0$ (razlog zašto je $a_n=0$, smo već objasnili).

(#) Odrediti realan broj α tako da

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha}$$

postoji.

Rj.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha} =$$

uvodimo smjene	$(x,y)\to(0,0) \Rightarrow \rho\to 0$
$x=\rho\cos\varphi$	
$y=\rho\sin\varphi$ $\rho>0$	vrijednost od φ
ρ i φ su dvije nove promjenjive	ne igra nikakvu ulogu u vrijednost integrala
$x^2+y^2=\dots=\rho^2$	

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho\cos\varphi\cdot\rho\sin\varphi\left(\sqrt{\rho^2}\right)^{\alpha} = \lim_{\rho\to 0}\rho^{\alpha+2}\cos\varphi\sin\varphi$$

$$= \cos\varphi\sin\varphi\lim_{\rho\to 0}\rho^{\alpha+2} = \begin{cases} 0, & \text{kada je } \alpha+2>0 \\ \text{neodređeno}, & \text{kada je } \alpha+2\le 0 \end{cases}$$

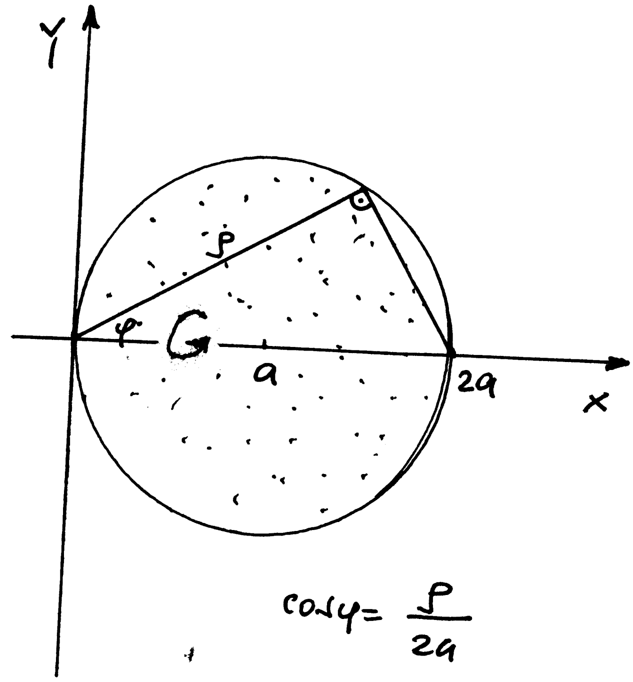
$$\alpha+2>0 \iff \alpha>-2$$

Dati limes će postojati akko je $\alpha>-2$.

Izračunati $I=\iint\limits_G \left(x+\frac{y^2}{x^2}\right)dx\,dy$ gdje je

$$G=\{(x,y): x^2+y^2-2ax\le 0,\ a>0\}.$$

Rj. Skicirajmo oblast G



$$x^2+y^2-2ax=0$$
$$x^2-2\cdot x\cdot a+a^2-a^2+y^2=0$$
$$(x-a)^2+y^2=a^2$$

krug sa centrom u tački $C(a,0)$ poluprečnika $r=a$

$$\cos\varphi=\frac{\rho}{2a}$$
$$\rho=2a\cos\varphi$$

Uvedimo polarne koordinate

$x=\rho\cos\varphi$

$y=\rho\sin\varphi$

$dx\,dy=\rho\,d\rho\,d\varphi$

$$G \xrightarrow{\text{transformiše}} G': \begin{cases} -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \\ 0\le\rho\le 2a\cos\varphi \end{cases}$$

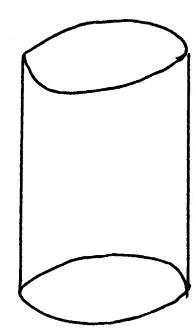
$$I=\iint\limits_G\left(x+\frac{y^2}{x^2}\right)dx\,dy=\left|\begin{matrix}\text{uvodimo}\\ \text{polarne}\\ \text{koordinate}\end{matrix}\right|=\iint\limits_{G'}\left(\rho\cos\varphi+\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)\rho\,d\rho\,d\varphi$$

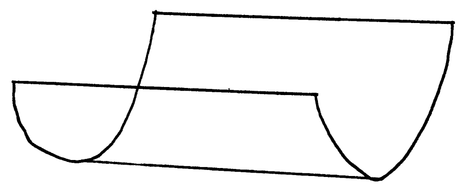
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\rho^2\,d\rho+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\rho\,d\rho=\ldots=\frac{8a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,d\varphi+$$

$$+2a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\cdot\cos^2\varphi\,d\varphi=\ldots=a^3\pi+a^2\pi=a^2(a+1)\pi$$ traženo rješenje

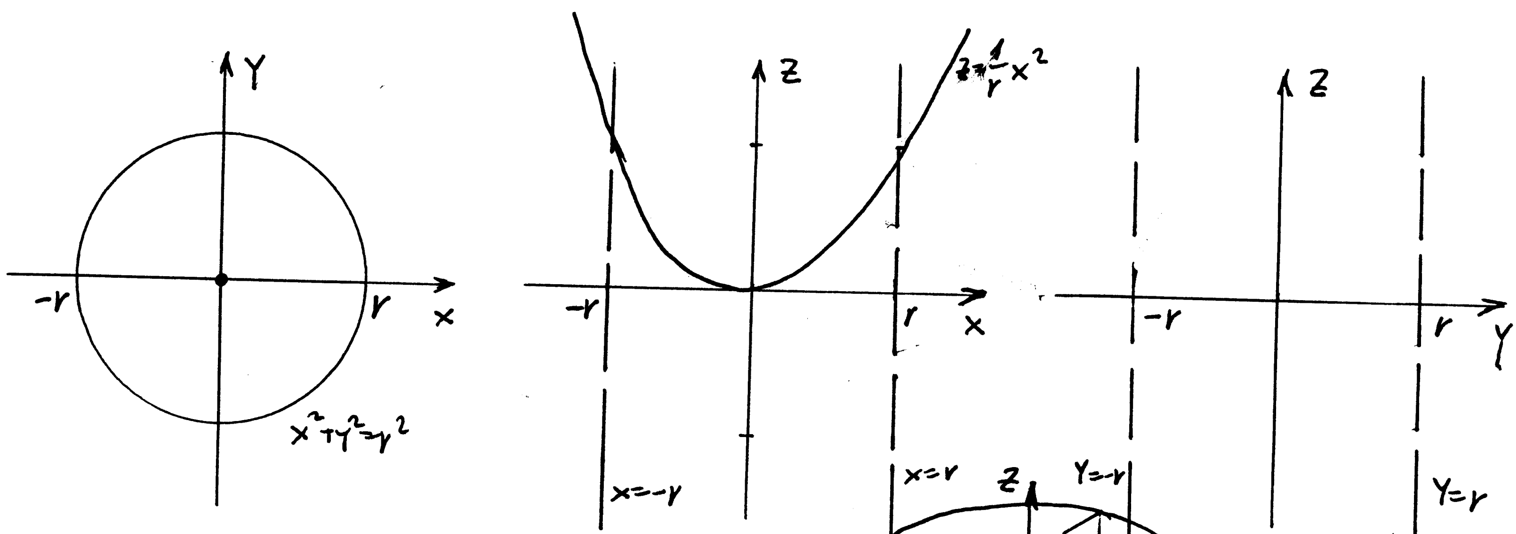
(#) Data je kriva c koja je dobijena kao presjek površina $x^2+y^2=r^2$ i $x^2=rz$ $(r>0)$. Izračunati površinski integral $\iint\limits_S dx\,dy$ gdje je S gornja strana površine koju zatvara kriva c.

Rj. U prostoru $x^2+y^2=r^2$ predstavlja cilindar, dok $x^2=rz$ predstavlja paraboloid

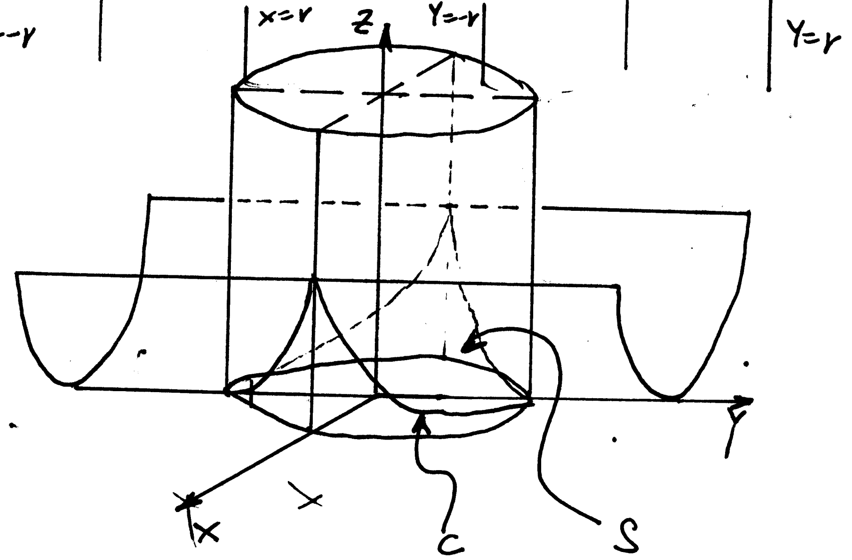




Napravimo presjeke datih površina sa koordinatnim ravnima



Na osnovu presjeka možemo skicirati sliku u prostoru.



$\iint_S dx\,dy = $ • ugao između vektora normale $\vec{n}$ na površ S i z-ose je uvijek između 0 i $\frac{\pi}{2}$ pa je $\cos\gamma > 0$

• projekcija od S na xOy ravan je krug $x^2+y^2=r^2$

$= +\iint_D dx\,dy =$

$=$ $D: x^2+y^2=r^2$

uvedimo polarne koordinate

$x=\rho\cos\varphi$

$y=\rho\sin\varphi$

$dx\,dy=\rho\,d\rho\,d\varphi$

$D \xrightarrow{\text{transformise}} D': \begin{cases} 0\le\rho\le r \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{cases}$

$= \iint_{D'} \rho\,d\rho\,d\varphi$

$$= \int_0^r \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2}\rho^2\Big|_0^r \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} = \pi r^2$$

traženo rješenje

(#) Izračunati fluks vektorskog polja

$$\vec{v} = (x, -y^2, x^2 + z^2 - 1)$$

po unutrašnjoj strani sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Rj

Prisjetimo se

Fluks vektorskog polja se računa po formuli

$$\Phi = \iint_S v_x \, dy\,dz + v_y \, dx\,dz + v_z \, dx\,dy$$

U našem slučaju

$$\Phi = \iint_S x \, dy\,dz - y^2 \, dx\,dz + (x^2 + z^2 - 1) \, dx\,dy$$

gdje je S unutrašnja strana sfere sa centrom u $C(0,0,0)$ poluprečnika 1.

Ako iskoristimo formulu Gauss-Ostrogradski imamo

$$\Phi = \iiint_\Omega (1 - 2y + 2z) \, dx\,dy\,dz =$$

Ω je unutrašnjost dobe sfere - ako uvedemo sferne koordinate imamo

$x = \rho \sin\varphi \cos\alpha$

$y = \rho \sin\varphi \sin\alpha$

$z = \rho \cos\varphi$

$dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\alpha$

$$\Omega \xrightarrow{\text{transformiše}} \Omega' : \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \alpha \le 2\pi \end{cases}$$

$$= \iiint_{\Omega'} (1 - 2\rho \sin\varphi \sin\alpha + 2\rho \cos\varphi) \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\alpha =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{1} \left(\rho^2 \sin\varphi - 2\rho^3 \sin^2\varphi \sin\theta + 2\rho^3 \sin\varphi \cos\varphi\right) d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{3}\rho^3\Big|_0^1 \sin\varphi - 2\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^1 \sin^2\varphi \sin\theta + 2\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^1 \sin\varphi\cos\varphi\right) d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{3}\sin\varphi - \frac{1}{4}(1-\cos 2\varphi)\sin\theta + \underbrace{\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\right) d\varphi}_{-\frac{1}{2}\cos\varphi\, d(\cos\varphi)}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3}\underbrace{\cos\varphi\Big|_0^{\pi}}_{-1-1} - \frac{1}{4}\sin\theta\left(\underbrace{\varphi\Big|_0^{\pi}}_{\pi} - \frac{1}{2}\underbrace{\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi}}_{0-0}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\underbrace{\cos^2\varphi\Big|_0^{\pi}}_{1-1=0}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\pi\sin\theta\right) d\theta = \frac{2}{3}\theta\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\pi \underbrace{\cos\theta\Big|_0^{2\pi}}_{1-1} =$$

$$= \frac{4\pi}{3}$$

$$1 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi$$

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

$$1 - \cos 2\varphi = 2\sin^2\varphi$$

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)$$